Problema 3. (cl. VII) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Arătaţi că:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{b(a+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{1008}} < \frac{2017(a+b+c)}{2016}.$$

Costin Negrii, profesor, Bucureşti

Soluţie

Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt{\frac{a}{1008} \cdot (b+c)} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{1008} + b + c\right) = \frac{a + 1008b + 1008c}{2016} \quad (1)$$ 2 puncte

Analog,

$$\sqrt{\frac{b(a+c)}{1008}} \leq \frac{b + 1008a + 1008c}{2016} \quad (2)$$ 1 punct

$$\sqrt{\frac{c(a+b)}{1008}} \leq \frac{c + 1008a + 1008b}{2016} \quad (3)$$ 1 punct

Adunând (1), (2) şi (3) obţinem inegalitatea:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{b(a+c)}{1008}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{1008}} \leq \frac{2017(a+b+c)}{2016} \quad (4)$$ 1 punct

Vom arăta acum că inegalitatea (4) este strictă. Dacă am avea egalitate atunci ar trebui să avem egalităţi în inegalităţile mediilor, deci:

$$\frac{a}{1008} = b + c \quad (5)$$

$$\frac{b}{1008} = a + c \quad (6)$$ 1 punct

$$\frac{c}{1008} = a + b \quad (7)$$

Adunând (5), (6) şi (7) şi simplificând prin $a+b+c > 0$, obţinem $\frac{1}{1008} = 2$, contradicţie. 1 punct